На правах рукописи

В. Свирк

Свиркин Виктор Михайлович

Спектр оператора Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Омск – 2011

Работа выполнена в лаборатории комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики
Омского филиала Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Берестовский Валерий Николаевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Никоноров Юрий Геннадьевич**
	доктор физико-математических наук, профессор **Шарафутдинов Владимир Альтафович**
Ведущая организация:	Казанский (Приволжский) федеральный университет

Защита состоится 22 сентября 2011 года в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Автореферат разослан 19 августа 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Спектральная геометрия – область математики, которая исследует взаимосвязи между геометрическими структурами на многообразиях и спектрами канонически определенных дифференциальных операторов. Спектральная геометрия является сравнительно молодой и быстро развивающейся математической дисциплиной, многие задачи которой мотивированы вопросами, возникающими в акустике, квантовой механике и других областях физики. Далее будет рассматриваться случай оператора Лапласа-Бельтрами (лапласиана).

Определение 1. Пусть (M^n, g) – риманово n-мерное многообразие класса C^∞ с метрическим тензором g. Тогда для функции $f \in C^2(M^n)$ можно вычислить лапласиан $\Delta_x f$ в точке $x \in M$ следующим образом: выбрать произвольным образом параметризованные длиной дуги геодезические $\gamma_j(t)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$, с началом в точке x и с взаимно ортогональными касательными векторами $\gamma_j'(0)$. Тогда

$$\Delta_x f = \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\Big(f\big(\gamma_j(t)\big)\Big)(0). \tag{1}$$

Под спектром лапласиана понимается множество его собственных значений с учетом их кратности, т.е. размерностей пространств соответствующих собственных функций.

Лапласиан естественным образом обобщается на случай комплекснозначных функций таким образом, что его спектр в комплексном и вещественном случаях совпадают. В данной работе проводится подробное исследование структуры пространств собственных функций в обоих случаях.

Из функционального анализа для компактного риманова многообразия M с метрическим тензором g известны общие свойства спектра лапласиана, из которых следует, что его можно представить как невозрастающую счетную дискретную последовательность неположительных чисел, каждое из которых повторяется конечное число раз, соответствующее кратности числа. Более того, каждая собственная функция лапласиана бесконечно дифференцируема (вещественно аналитична, если многообразие является вещественно аналитическим), и существует ортонормированный базис пространства $L^2(M, \mu_g)$, состоящий из собственных функций лапласиана, где μ_g – мера на M, индуцированная тензором g. $L^2(M, \mu_g)$ – пространство измеримых функций, квадраты которых интегрируемы, относительно меры μ_g. Разложение функции $f \in L^2(M, \mu_g)$ по этому базису называется разложением *в ряд Фурье*.

В качестве примера спектра, приведем спектр лапласиана группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$ с биинвариантной метрикой g, индуцированной формой Киллинга, взятой с обратным знаком, вычисленный на основе алгоритма, полученного в диссертаци. Как сказано выше, спектр лапласиана задается собственными числами λ и их кратностями $\sigma(\lambda)$, которые, в случае группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$, имеют следующий вид:

$$\lambda(\nu_1, \nu_2) = -\frac{1}{12}(\nu_1^2 + \nu_2^2 - 5), \quad \text{где } \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N},$$
$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{(3!)^2} \sum_{\substack{\nu^2+\eta^2=5-12\lambda; \\ \nu,\eta\in\mathbb{N},\ \nu>\eta}} \left[\nu\eta(\nu-\eta)(\nu+\eta)\right]^2.$$

Стоит отметить, что хотя спектр определяется алгоритмически, и посчитать его в ограниченном диапазоне не представляет труда, но вот ответить на такой естественный вопрос: “ Принадлежит ли заданное число λ множеству Spec $(\mathbf{Spin(5)}, g)$, т.е. существуют ли такие натуральные числа ν_1 и ν_2, для которых верно равенство $\lambda(\nu_1, \nu_2) = \lambda$?” уже не так-то просто. В данной работе с помощью применения теории бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами и теории чисел, используя разложение числа на простые множители, удалось ответить этот вопрос а также установить число слагаемых в сумме, приведенной выше.

Большинство исследований в спектральной геометрии затрагивают один из двух ее основных вопросов, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1) Что можно сказать о спектре оператора Лапласа, исходя из геометрических характеристик многообразия?

2) Что можно сказать о геометрии многообразия, исходя из спектра его оператора Лапласа?

Задачи, относящиеся к первому вопросу, называются *прямыми*, ко второму вопросу — *обратными*.

Из инвариантности оператора Лапласа относительно изометрий следует совпадение спектров операторов Лапласа изометричных римановых многообразий. Таким образом, спектр лапласиана является изометричным инвариантом. Один из самых ранних результатов, относящийся к решению обратной задачи, принадлежит Г. Вейлю, который в 1911 использовал теорию интегральных уравнений, разработанную Д. Гильбертом, чтобы показать, что объем ограниченной области в евклидовом пространстве может быть определен по асимптотическому поведению собственных значений краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Этот частный результат показывает, что спектр лапласиана содержит в себе информацию о некоторых изометрических инвариантах многообразия, на котором он задан. В работе [9] доказано, что по спектру лапласиана связного компактного риманова многообразия можно определить размерность, объем, а также некоторые другие изометрические инварианты этого многообразия. Возникает вопрос: определяет ли спектр лапласиана многообразие, на котором он задан, с точностью до изометрии, следовательно всегда ли обратная задача имеет полное решение? В известной лекции М. Каца [16] этот вопрос образно сформулирован так: "Можно ли услышать форму барабана?". В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Первый пример изоспектральных, но не изометричных многообразий найден Дж. Милнором для размерности 16 в работе [18]. В дальнейшем были найдены целые семейства изоспектральных, но не изометричных многообразий. Отсюда, в частности, возникает следующий вопрос: для каких семейств метрик из изоспектральности будет следовать их изометричность? Риманова метрика g на компактном многообразии без края называется локально слышимой, если для достаточно близких к ней метрик g' справедливо утверждение: изоспектральность метрик g и g' влечет их изометричность. В работе В.А.Шарафутдинова [8] доказана локальная слышимость метрики постоянной отрицательной секционной кривизны.

Как показано выше, спектр оператора Лапласа является одной из важнейших геометрических характеристик многообразия. Его прямое вычисление в общем случае является крайне затруднительной задачей, за исключением некоторых редких случаев. Одним из таких случаев, для которых задача в некотором смысле разрешима, как показывает данная диссертация, является класс однородных нормальных римановых многообразий.

В [10] спектр лапласиана вычислен в случае плоских торов, а в [15] в случае сфер со стандартной метрикой и комплексных проективных пространств с метрикой Фубини-Штуди. В [6] для компактного плоского 3-многообразия была определена и вычислена функция следа, которая задает спектр лапласиана рассматриваемого многообразия. Работы [12] и [13] были указаны Ю.Г.Никоноровым после получения основных результатов данной диссертации. В работе [12] Бирса и Милмана высказаны идеи, основанные на теории представлений, о сведении задачи поиска спектра лапласиана компактной полупростой группы Ли с биинвариантной (т.е. инвариантной относительно левых и правых сдвигов) римановой метрикой к алгебраической задаче, решение которой известно лишь в общих чертах. В работе [13] Феган развил эту идею в односвязном случае, получив алгоритм поиска спектра лапласиана, сформулированный на языке теории представлений и требующий еще некоторой доработки для непосредственных вычислений.

Обзор результатов, полученных в спектральной геометрии, можно найти в работах [11], [14], [19]. Приведем последовательно основные достижения данной диссертационной работы вместе с необходимыми понятиями в сравнении с результатами, полученными ранее.

Одним из ключевых понятий в исследовании спектра лапласиана риманова многообразия является *риманова субмерсия*. Пусть (P, g_P) и (M, g_M) – римановы C^∞-многообразия, тогда *римановой субмерсией* с базой (P, g_P) и тотальным пространством (M, g_M) называется C^∞-сюръекция $p : (M, g_M) \to (P, g_P)$, для которой в каждой точке $x \in M$ ограничение дифференциала $dp(x)$ на ортогональное дополнение $\ker(dp(x))^\perp \subset (T_xM, g_M(x))$ ядра $\ker(dp(x))$ является линейной изометрией евклидовых пространств. При этом всякий прообраз $p^{-1}(y)$, $y \in P$, является C^∞-подмногообразием в M и называется *слоем субмерсии* p. Частным случаем римановой субмерсии (с дискретными слоями) является локально изометричное накрывающее отображение римановых многообразий. Другим частным случаем римановой субмерсии (с вполне геодезическими слоями) является проекция прямого метрического произведения римановых многообразий на один из сомножителей. Напомним, что подмногообразие N риманова многообразия (M, g) называется *вполне геодезическим*, если каждая геодезическая $\gamma(t)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, многообразия (M, g) с началом $x_0 := \gamma(0) \in N$, касающаяся многообразия N в точке x_0, целиком содержится в N. Первым результатом нашего исследования в компактном случае является следующее утверждение: спектр базы римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями является подмножеством спектра тотального пространства.

Исследование спектра лапласиана однородного риманова многообразия посредством римановой субмерсии в определенном смысле сводится к случаю групп Ли. Напомним, что риманово многообразие (M, μ) называется *однородным*, если его группа изометрий действует на нем транзитивно. Известно, что всякое однородное риманово многообразие изометрично фактор-пространству G/H левых смежных классов gH, $g \in G$, некоторой связной группы Ли G по ее компактной подгруппе H с метрическим тензором μ, инвариантным относительно всех отображений $\sigma(g) : G/H \to G/H$, $g \in G$, определенных формулой $\sigma(g)(xH) = (gx)H$. При этом на группе Ли G существует такой метрический тензор ν, инвариантный относительно всех левых сдвигов $l(g) : G \to G$, $g \in G$, определенных формулой $l(g)(g') = gg'$, и правых сдвигов $r(h) : G \to G$, $h \in H$, определенных формулой $r(h)(g) = gh$, что каноническая проекция $p : (G, \nu) \to (G/H, \mu)$ является римановой субмерсией. Если тензор ν является биинвариантным, т.е. инвариантным относительно действия всех левых и правых сдвигов группы Ли G, то $(G/H, \mu)$ называется *нормальным* однородным римановым многообразием. Следующий важный результат данной работы формулируется так: p имеет вполне геодезические слои, и как следствие первого результата, $\mathrm{Spec}\,(G/H) \subset \mathrm{Spec}\,(G)$.

Отметим, что оба приведенных результатов были доказаны ранее в [10], но в данной работе дано их новое простое доказательство.

С помощью этих результатов исследование спектра лапласиана на однородных нормальных римановых многообразий в некотором смысле сводится к случаю прямого метрического произведения компактных односвязных простых групп Ли G и тора с биинвариантными римановыми метриками. Далее с помощью методов теории представлений удалось сначала доказать, что спектр лапласиана связной компактной группы Ли G с биинвариантной метрикой ν может быть получен из рассмотрения всех неприводимых комплексных представлений, а затем в случае простой группы Ли G вывести формулы для вычисления собственного значения, отвечающего рассматриваемому представлению, и кратности собственного числа через старшие веса представлений. Заметим, что результаты из предыдущего предложения в полупростом случае ранее уже были получены в несколько иных обозначениях в статье [13], но есть следующие важные различия между ними: во-первых, первое утверждение в [13] было доказано только в случае полупростых групп Ли, а во-вторых, при его доказательстве автор использует такие общие результаты теории представлений, как например, теорема Петера-Вейля, а в данной работе использовались лишь базовые понятия теории представлений. Как следствие указанных выше утверждений, выводится алгоритм поиска спектра лапласиана компактной односвязной простой группы Ли G с метрикой ν, а также его обобщение на неодносвязный случай. Стоит отметить, что непосредственное вычисление спектра лапласиана с помощью полученного алгоритма требует лишь знания соотношений между корнями группы и фундаментальными весами, двойственных к ним объектов, относительно скалярного произведения, индуцированного минус формой Киллинга. Эти соотношения полностью представлены в виде справочной информации, например, в книге [3]. Также в данной работе получен алгоритм поиска спектра лапласиана прямого метрического произведения связных компактных групп Ли с биинвариантными метриками, аналогов которого пока не найдено.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Валерию Николаевичу Берестовскому за помощь и поддержку в течение всей работы над диссертацией.

Цель работы. Исследование и разработка алгоритма поиска спектра оператора Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях; вычисление спектра лапласиана связных компактных простых групп Ли ранга один и два с биинвариантными римановыми метриками.

Методы исследования. В качестве методов исследования использовались методы дифференциальной геометрии, теории групп Ли, теории представлений групп и алгебр Ли, а также элементы теории бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами (и натуральными аргументами) и теории чисел.
Научная новизна работы. Все полученные в диссертации результаты являются новыми и перечислены в порядке появления их в работе.

1. Получено новое доказательство теоремы о включении спектра базы римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями в спектр тотального пространства. и как следствие, переход от исследования спектра лапласиана однородных нормальных римановых многообразий к исследованию спектра лапласиана прямого метрического произведения тора и конечного числа связных компактных односвязных простых групп Ли с биинвариантными римановыми метриками.

2. Разработан алгоритм поиска спектра лапласиана для случая связной компактной односвязной простой группы Ли с биинвариантной римановой метрикой.

3. Разработан обобщенный алгоритм поиска спектра оператора Лапласа для случая связной компактной простой группы Ли с биинвариантной римановой метрикой.

4. Разработан алгоритм поиска спектра оператора Лапласа на прямом метрическом произведении связных компактных простых групп Ли с биинвариантными римановыми метриками.

5. Произведены вычисления спектров операторов Лапласа на связных компактных простых группах Ли ранга один и два. В случае групп Ли ранга два установлена связь полученных формул, задающих спектр оператора Лапласа, с теорией чисел и целочисленными бинарными квадратичными формами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Результаты могут быть использованы в исследованиях задач спектральной геометрии на нормальных однородных римановых многообразиях, в частности, для поиска первого ненулевого собственного числа лапласиана или всего его спектра.
Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях "Современные проблемы анализа и геометрии" (Новосибирск, 2009), "Стохастические модели в биологии и предельные алгебры" (Омск, 2010) и "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation" (Казань,

2010), на международном геометрическом семинаре в рамках школы-конференции "Лобачевские чтения-2009" (Казань, 2009), на школе-семинаре "Ломоносовские чтения на Алтае" (Барнаул, 2010), на семинаре отдела анализа и геометрии в Институте математики СО РАН им. С.Л. Соболева под руководством академика РАН Ю.Г.Решетняка (Новосибирск, 2010).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [20] – [26].

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 81 странице, содержит введение, главу с предварительными сведениями, две главы с полученными результатами и список литературы. Главы разбиты на параграфы, список литературы содержит 45 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится постановка задач, рассматриваемых в работе, дается краткое изложение содержания диссертации.

Первая глава содержит необходимые предварительные сведения и разбита на три параграфа. Первый параграф содержит несколько вариантов определения оператора Лапласа на римановых многообразий и его основные свойства. Во втором параграфе формулируются основные определения и результаты из теории конечномерных линейных представлений групп и алгебр Ли, использующиеся в исследовании. Третий параграф содержит все необходимые сведения о классических решениях задачи представления натуральных чисел значениями положительно определенных бинарных целых квадратичных форм на целочисленных двумерных векторах.

Во **второй главе** изучается спектр оператора Лапласа на гладких вещественных и комплекснозначных функциях, определенных на компактных однородных нормальных римановых многообразиях. Глава состоит из семи параграфов.

В параграфе 2.1 исследуется взаимосвязь спектров двух римановых многообразий, связанных римановой субмерсией (определение см. выше). Главным результатом этого параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть* $p : (M^n, g_M) \to (P^m, g_P)$ *– риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями и* $f : (P, g_P) \to \mathbb{R}$ *– собственная функция лапласиана* Δ_P*, отвечающая собственному значению* λ*. Тогда* $f \circ p : (M, g_M) \to \mathbb{R}$ *– собственная функция лапласиана* Δ_M*, отвечающая собственному значению* λ*. Как следствие,* $\mathrm{Spec}\,(P, g_P) \subset \mathrm{Spec}\,(M, g_M)$*. При этом собственные функции лапласиана* Δ_P*, отвечающие собственному значению* λ*, находятся во взаимно* *однозначном соответствии с собственными функциями лапласиана Δ_M, отвечающими собственному значению λ и постоянными на каждом слое субмерсии p.*

На основе теоремы 2.1 получен следующий результат:

Теорема 2.4. *Пусть $(M, g) = (P, g_P) \times (N, g_N)$ – прямое произведение компактных римановых C^∞-многообразий. Тогда*

$$\operatorname{spec}(P, g_p) + \operatorname{spec}(N, g_N) = \operatorname{spec}(M, g).$$

Как будет показано ниже в случае связной компактной группы Ли с биинвариантной римановой метрикой, можно также установить соотношение между кратностями собственных значений прямого произведения и его сомножителей.

В параграфе 2.2 исследуется спектр оператора Лапласа на однородном римановом многообразии. Важным следствием теоремы 2.1 является следующее утверждение:

Теорема 2.5. *Риманова субмерсия $p : (G, \nu) \to (G/H, \mu)$ имеет вполне геодезические слои. Как следствие, $\operatorname{Spec}(G/H, \mu) \subset \operatorname{Spec}(G, \nu)$. При этом собственные (вещественно аналитические) функции лапласиана $\Delta_{G/H}$, отвечающие собственному значению λ, находятся во взаимно однозначном соответствии с собственными (вещественно аналитическими) функциями лапласиана Δ_G, отвечающими собственному значению λ и инвариантными относительно всех сдвигов $r(h)$, $h \in H$.*

Если (M^n, μ) – нормальное однородное риманово многообразие (определение см. выше), то оно изометрично прямому произведению $(E^m, \mu_1) \times (M^{n-m}, \mu_2)$, где (E^m, μ_1) – евклидово пространство, $m \geq 0$, а (M^{n-m}, μ_2) – компактное нормальное однородное риманово многообразие. Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только случай компактного нормального однородного риманова многообразия (M, μ). Далее из теоремы 2.5 следует, что спектр нормального однородного риманова многообразия $(M, \mu) \cong (G/H, \mu)$ включается в спектр связной компактной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν. Известно, что для всякой связной компактной группы Ли G с биинвариантной метрикой ν существует локально изометричное накрытие прямым метрическим произведением (P, δ) конечного числа связных компактных односвязных простых групп Ли с биинвариантными римановыми метриками, каждая из которых определяется однозначно с точностью до умножения на положительную постоянную, и тора с плоской метрикой. Вследствие того, что локально изометричное накрытие является римановой субмерсией, из теоремы 2.1 получаем вложение спектров $\operatorname{Spec}(G, \nu) \subset \operatorname{Spec}(P, \delta)$, а следовательно верно вложение $\mathrm{Spec}\,(M,\mu) \subset \mathrm{Spec}\,(P,\delta)$. Таким образом, главная цель исследования найти спектр лапласиана пространства P, т.к. спектр тора известен (см. пример 2.12 в параграфе 2.3), то необходимо разработать алгоритмы поиска спектра лапласиана связной компактной односвязной простой группы Ли и прямого метрического произведения связных компактных групп Ли с биинвариантными римановыми метриками.

В параграфе 2.3 приведена справочная информация из книги [2] о множествах собственных значений лапласиана компактных римановых симметрических пространств ранга один и рассмотрены примеры римановых субмерсий, возникающих между ними. Затем, опираясь на результаты из [7] и [4], приведены спектры и структуры пространств собственных функций лапласианов одномерной и двумерной сферы. В примере 2.12 параграфа 2.3 формулируются условия из [22], задающие спектр плоского тора.

В параграфе 2.4 исследуются пространства вещественных собственных функций лапласиана E_λ на связной компактной группе Ли (G,ν) посредством естественных групп изометрий рассматриваемого риманова многообразия (G,ν) и пространств матричных элементов регулярных представлений группы Ли G на пространстве E_λ. Результатом исследования является следующая теорема:

Теорема 2.26. *Пусть G — компактная связная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой ν, c — некоторое неприводимое комплексное представление группы G размерности d_c. Понимая c как некоторый гомоморфизм $c: G \to \mathbf{U}(d_c)$ групп Ли, можно утверждать, что все функции $c_{ij}: G \to c(g)_{ij}$; $i,j = 1,\ldots,d_c$, являются линейно независимыми над $\mathbb{C}$ собственными функциями оператора Лапласа Δ на (G,ν) с одним и тем же собственным значением λ_c. Линейная оболочка M_c этих функций является прямой суммой d_c неприводимых пространств представления $\theta: g \in G \to \theta(g)$ группы G (где $\theta(g)$ сопоставляет каждой вещественной функции f на G функцию $\theta(g)(f) := f \circ l_{g^{-1}}$), ограничение которого на каждое из них эквивалентно c. Выбирая для некоторого представителя c каждого класса эквивалентности неприводимых комплексных представлений группы G некоторый ортонормированный относительно стандартного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $L^2_{\mathbb{C}}(G,dg)$ базис из $d_c{}^2$ комплекснозначных функций в M_c, получим полную в $L^2_{\mathbb{C}}(G,dg)$ ортонормированную систему (из собственных функций оператора Δ).*

В данной работе сформулирован аналог этой теоремы в вещественном случае. Главное отличие вещественного случая от комплексного — в дополнительной необходимости определять тип каждого неприводимого представления. Поэтому для поиска спектра больше подходит комплексный случай. Из теоремы 2.26 вытекает следствие, содержащее формулу вычисления кратности собственного значения.

Следствие 2.27. *В обозначениях теоремы 2.26 получаем, что кратность собственного значения λ равна*

$$\sum_{c:\lambda_c=\lambda} d_c{}^2, \tag{2}$$

где c пробегает все классы эквивалентности неприводимых комплексных представлений группы Ли G, отвечающих собственному числу λ.

В конце параграфа 2.4 дается алгебраический способ вычисления собственных значений лапласиана через билинейную симметрическую форму на алгебре Ли связной компактной группы Ли G с биинвариантной метрикой ν, ассоциируемую с неприводимым представлением группы Ли G (в случае присоединенного представления эта форма есть не что иное, как *форма Киллинга* k_{ad}). На основании этого утверждения в параграфе 2.5 для связной компактной простой группы Ли (G,ν) удалось получить следующие результаты. Во-первых, установить связь между кривизной Риччи группы Ли (G,ν) (эйнштейнова многообразия) и собственным значением лапласиана, отвечающего присоединенному представлению. Во-вторых, получить формулу вычисления собственного значения лапласиана группы Ли G и размерности соответствующего неприводимого представления через его старший вес.

Теорема 2.34. *Предположим, что биинвариантная риманова метрика ν на связной компактной простой группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, множеством положительных корней Γ^+ и множеством старших весов $\Lambda^+(G)$ определяется скалярным произведением $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$ на $\mathfrak{g}$. Пусть старшему весу $\Lambda \in \Lambda^+(G)$ отвечает неприводимое комплексное линейное представление $c : G \to \mathrm{GL}(d(\Lambda),\mathbb{C})$ группы Ли G с собственным значением $\lambda(\Lambda)$ лапласиана Δ на (G,ν). Тогда имеют места следующие формулы:*

$$\lambda_c = -\big[(\Lambda+\beta,\Lambda+\beta) - (\beta,\beta)\big], \tag{3}$$

$$d(\Lambda) = \dim_{\mathbb{C}} c = \prod_{\alpha\in\Gamma^+}\left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right), \text{ где } \beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Gamma^+}\alpha. \tag{4}$$

Замечание 2.35. *Вследствие того, что группа Ли G простая, любая биинвариантная метрика ν будет пропорциональна форме Киллинга, взятой со знаком минус, т.е. $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$, где $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$. В этом случае в обозначениях теоремы 2.34 все числа в формуле (3) нужно умножить на $1/\gamma$, а все остальное оставить без изменений.*

Из теоремы 2.34 и следствия 2.27 получаем

Следствие 2.36. *В обозначениях теоремы* 2.34 *кратность собственного значения* λ *лапласиана* Δ *на* (G, ν) *равна*

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\Lambda:\ \lambda(\Lambda)=\lambda} \prod_{\alpha\in\Delta_+} \left(\frac{(\Lambda,\alpha)}{(\beta,\alpha)}+1\right)^2, \tag{5}$$

где Λ *пробегает все элементы множества* $\Lambda^+(G)$, *отвечающие собственному числу* λ.

В конце параграфа 2.5 в следствии 2.37 на основании теорем 2.26, 2.34, следствия 2.27 и замечания 2.35 формулируется алгоритм поиска спектра лапласиана связной компактной простой односвязной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой ν, предполагая использование таблиц I-IX из [3].

Следствие 2.37. *Для вычисления спектра лапласиана связной компактной односвязной простой группы Ли* G *с биинвариантной римановой метрикой* ν *с условием* $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$ *нужно:*

1) *вычислить выражение* $b = \langle\tilde{\alpha}+\beta, \tilde{\alpha}+\beta\rangle - \langle\beta,\beta\rangle$, *предполагая, что относительно скалярного произведения* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (*на* $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$) *векторы* ε_i *из соответствующей таблицы в* [3] *взаимно ортогональны и единичны, где* $\tilde{\alpha}$ — *старший (максимальный) корень,* β - *полусумма положительных корней, обозначаемая в* [3] *через* ρ;

2) *взять скалярное произведение* $(\cdot,\cdot) = \frac{1}{b}\langle\cdot,\cdot\rangle$;

3) *найти фундаментальные веса* $\varpi_1,\dots,\varpi_l$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *группы Ли* G (*если* $\mathfrak{g}$ *имеет ранг* l) *по соответствующей таблице из* [3];

4) *для каждого старшего веса* $\Lambda = \sum_{i=1}^{l}\Lambda_i\varpi_i$, *где* $\Lambda_i \in \mathbb{Z}$ *и* $\Lambda_i \geq 0$, *вычисляем собственное число* $\lambda(\Lambda)$ *оператора Лапласа, отвечающее старшему весу* Λ, *по формуле* (3), *деленной на* γ;

5) *для каждого старшего веса* Λ *вычислить размерность* $d(\Lambda)$ *неприводимого комплексного представления с со старшим весом* Λ *по формуле* (4);

6) *найти кратность* $\sigma(\lambda)$ *каждого собственного значения* λ, *применяя формулу* (5).

Таким образом, получаем спектр $\mathrm{Spec}\,(G,\nu)$.

В параграфе 2.6 в следствии 2.39 этот алгоритм обобщается на случай неодносвязных групп Ли с помощью использования свойств *характеристической решетки* — множества весов всех неприводимых представлений группы Ли. Характеристическая решетка подробно рассматривается в добавлении А.Л.Онищика в

[1] и в [5]. Множество старших весов $\Lambda^+(G)$ группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и множеством корней Γ задается характеристической решеткой $\Lambda(G)$, для которой верно соотношение:

$$\Lambda_0(\Gamma) \subseteq \Lambda(G) \subseteq \Lambda_1(\Gamma), \tag{6}$$

где $\Lambda_0(\Gamma)$ и $\Lambda_1(\Gamma)$ – это характеристические решетки связных компактных простых групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ обладающей нулевым центром и являющейся односвязной соответственно. Множества $\Lambda_0(\Gamma)$ ($\Lambda_0^+(\Gamma)$) и $\Lambda_1(\Gamma)$ ($\Lambda_1^+(\Gamma)$) в случае группы Ли G состоят из всех линейных комбинаций корней и фундаментальных весов группы Ли G с целочисленными (неотрицательными) коэффициентами соответственно. Множество старших весов $\Lambda_1^+(\Gamma)$ совпадает с множеством всех старших весов алгебры Ли $\Lambda^+(\mathfrak{g})$. Соотношение (6) классифицирует все связные компактные простые группы Ли с фиксированной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, т.е. задает взаимнооднозначное соответствие между всеми решетками, для которых выполняется соотношение (6), и всеми неизоморфными связными компактными простыми группами Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (более подробно см. параграф 1.2 и теорему 1.29 данной работы). Получаем обобщение алгоритма из следствия 2.37.

Следствие 2.39. *Для вычисления спектров лапласианов всех связных компактных простых групп Ли с простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и биинвариантной римановой метрикой ν с условием $\nu(e) = -\gamma k_{\mathrm{ad}}$, где $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$, нужно выполнить пункты* 1), 2), 3) *из следствия* 2.37, *далее:*

4) *для каждого старшего веса $\Lambda \in \Lambda^+(\mathfrak{g})$, т.е. для каждого $\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{l} \Lambda_j \varpi_j$, где $\Lambda_j \in \mathbb{Z}$ и $\Lambda_j \geq 0$ при $j = 1, \dots, l$, найти собственное число $\lambda(\Lambda)$ оператора Лапласа, отвечающее старшему весу Λ, по формуле* (3), *деленной на γ, и размерность $d(\Lambda)$ неприводимого комплексного представления комплексной оболочки алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом Λ, применяя формулу* (4);

5) *для каждой решетки $\Lambda(G)$, удовлетворяющей соотношению* (6), *где $\Lambda_0(\Gamma)$ и $\Lambda_1(\Gamma)$ – решетки, порожденные простыми корнями и фундаментальными весами, найденные в п.* 1) *и п.* 3) *соответственно, G – группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая характеристической решетке $\Lambda(G)$, выполнить следующие три пункта:*

6) *найти множество старших весов $\Lambda^+(G) = \Lambda(G) \cap \Lambda^+(\mathfrak{g})$, задав его через фундаментальные веса $\varpi_1, \dots, \varpi_l$;*

7) *для каждого старшего веса $\Lambda \in \Lambda^+(G)$ найти из п.* 4) *собственное число $\lambda(\Lambda)$ и размерность $d(\Lambda + \beta)$ неприводимого комплексного представления, отвечающих весу Λ;*

8) *найти кратность каждого собственного значения λ, применяя формулу*

(5), *получив таким образом спектр* $\operatorname{Spec}(G(\Lambda), \nu)$ *группы Ли* G, *отвечающей характеристической решетке* $\Lambda(G)$.

Таким образом, получаем все спектры $\operatorname{Spec}(G, \nu)$ *групп Ли* G *с алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ *и биинвариантной метрикой* ν.

В параграфе 2.7 в теореме 2.40 описывается способ вычисления спектра прямого метрического произведения двух связных компактных групп Ли, у которых спектр уже известен.

Теорема 2.40. *Пусть группа Ли* $(G \times H, \nu_1 \times \nu_2)$ *– прямое метрическое произведение связных компактных групп Ли* (G, ν_1) *и* (H, ν_2) *с биинвариантными римановыми метриками* ν_1 *и* ν_2. *Тогда множество собственных значений лапласиана группы Ли* $(G \times H, \nu_1 \times \nu_2)$ *задается следующим образом*

$$\operatorname{spec}(G \times H, \nu_1 \times \nu_2) = \big\{\lambda_1 + \lambda_2 \mid \lambda_1 \in \operatorname{spec}(G, \nu_1), \lambda_2 \in \operatorname{spec}(H, \nu_2)\big\}. \quad (7)$$

Кратность собственного значения лапласиана $\lambda \in \operatorname{spec}(G \times H, \nu_1 \times \nu_2)$ *группы Ли* $G \times H$ *равна*

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} (n_1^2 + \ldots + n_p^2)(m_1^2 + \ldots + m_k^2), \quad (8)$$

где λ_1 *и* λ_2 *независимо пробегают все множество собственных значений групп Ли* G *и* H *соответственно,* $n_1, \ldots, n_p$ *и* $m_1, \ldots, m_k$ *– размерности всех неэквивалентных неприводимых комплексных представлений, отвечающих собственным числам* λ_1 *и* λ_2 *групп Ли* G *и* H *соответственно.*

В качестве иллюстрации алгоритма вычисляется спектр прямого тора со стандартной метрикой.

В **третьей главе** настоящей диссертации производятся вычисления спектров лапласианов всех связных компактных простых групп Ли ранга один и два с биинвариантными метриками посредством алгоритма, разработанного в параграфе 2.6, а также проводится подробный анализ полученных результатов. В параграфах 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 вычисляются спектры лапласианов групп Ли $\mathbf{SU(2)}$ и $\mathbf{SO(3)}$, $\mathbf{SU(3)}$ и $\mathbf{SU(3)}/C(\mathbf{SU(3)})$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{Spin(5)}$ и $\mathbf{SO(5)}$ соответственно. В параграфе 3.5 осуществляется анализ результатов вычислений и формулируются новые вопросы, главными из которых выделяются следующие:

1) Является ли данное отрицательное число λ собственным значением лапласиана?

2) Найти число слагаемых суммы из формулы кратности собственного значения лапласиана (пример задания спектра группы Ли $\mathbf{Spin(5)}$ см. выше).

В параграфе 3.6 с помощью применения результатов теории бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами и теории чисел, сформулированных в параграфе 1.3 (практически все сведения даются по книге Эдмунда Ландау [17]), используя разложение числа на простые множители, удается частично ответить на эти вопросы для рассмотренных групп. В качестве ответа на первый вопрос приводится алгоритм, позволяющий определить, является ли данное число собственным значением лапласиана. На второй вопрос полностью удается ответить только в случае группы Ли **Spin(5)**, для остальных из перечисленных групп лишь частично.

Список литературы

[1] *Адамс Д.* Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.

[2] *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.

[3] *Бурбаки Н.*, Группы и алгебры Ли. Главы IV-VI. М.: Мир, 1972.

[4] *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.

[5] *Дынкин Е. Б., Онищик А. Л.* Компактные группы Ли в целом // Усп. матем. наук, 1955. Т. 10, № 4(66). С. 3–74.

[6] *Исангулов Р. Р.* Изоспектральные плоские 3–многообразия // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 5. С. 1086–1111.

[7] *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

[8] *Шарафутдинов В. А.* Локальная слышимость гиперболической метрики // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1176–1194.

[9] *Berger M.* Geometry of the spectrum // Differential Geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1975. Part 2. P. 129–152.

[10] *Berger M., Gauduchon P., Mazet E.* Le spectre d'une Vari'et'e Riemannienne // Lecture Notes in Math., V. 194. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1971.

[11] *Duitstermaat J. J.,Guillemin V. W.* Spectral geometry of real and complex manifolds // Differential Geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1975. Part 2. P. 205–209.

[12] *Beers B. L., Millman R.* The spectra of the Laplace-Beltrami operator on compact semisimple Lie groups // Amer. J. Math. 1977. V. 99. N 4. P. 801–807.

[13] *Fegan H. D.* The spectrum of the Laplacian on forms over a Lie group // Pacific J. Math. 1980. V. 90, N 2. P. 373–387.

[14] *Gilkey P. B.* The spectral geometry of real and complex manifolds // Differential Geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1975. Part 2. P. 265–280.

[15] *Ikeda A.*, *Taniguchi Y.* Spectra and eigenforms of the Laplacian on Sn and Pn(C) // Osaka J. Math. 1978. V. 15, N 3. P. 515–546

[16] *Kac M.* Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73, N 4, Part 2. P. 1–23

[17] *Landau L.* Elementary Number Theory. N.Y.: Chealsea Pub. Comp., 1966.

[18] *Milnor J.* Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1964. V. 51. P. 542.

[19] *Rosenberg S.* The Laplacian on a Riemannian Manifold // An Introduction to Analysis on Manifolds. London Mathematical Society Student Texts 31. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, включенных в перечень ВАК РФ

[20] *Берестовский В. Н., Свиркин В. М.* Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // Матем. труды. 2009. Т. 12, № 2. С. 3–40.

[21] *Берестовский В. Н., Свиркин В. М.* Спектр оператора Лапласа на компактных односвязных простых группах Ли ранга два // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2009. Т. 151, № 4. С. 15–35.

[22] *Свиркин В. М.* Спектр лапласиана прямого метрического произведения связных компактных групп Ли // Вестник Омского ун-та. 2011. № 2. С. 56–61.

[23] *Свиркин В. М.* Спектр оператора Лапласа связных компактных простых групп Ли ранга один и два // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152, № 1. С. 219–234.

Публикации в других изданиях

[24] *Берестовский В. Н., Свиркин В. М.* Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях // Тезисы международной конференции "Современные проблемы анализа и геометрии" 14–20 сентября 2009. Новосибирск. С. 14.

[25] *Берестовский В. Н., Свиркин В. М.* Спектр оператора Лапласа на компактных односвязных простых группах Ли ранга два // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения - 2009. Материалы восьмой молодежной науч. школы-конф. Казань: Казан. матем. об-во, 2009. Т. 39. С. 3–5.

[26] *Свиркин В. М.* Спектр оператора Лапласа связных компактных простых группах Ли ранга один и два // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения - 2010. Материалы девятой молодежной научной школы-конф. Казань: Казан. матем. об-во, 2010. Т. 40. С. 296–299.